- Πως ερμηνεύεται η απαίτηση περί υπερτερούσας διαγώνιου στη μέθοδο Jacobi;

1) Γεώργιος Δ. Ακρίβης και Βασίλειος Α. Δουγαλής (2008) – Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση (3η Έκδοση) – Εκδοτικός Οίκος: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Σελ. 125-126

Θεώρημα 3.4 *Έστω x η λύση του συστήματος $Ax = b$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

α) *Η επαναληπτική μέθοδος* (3.64) *συγκλίνει, δηλαδή για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, έχουμε $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$.*

β) $\rho(G) < 1$, *όπου G ο πίνακας επανάληψης $G = M^{-1}N$ της* (3.64).

γ) *Υπάρχει φυσική νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\| < 1$.*

δ) $\lim\limits_{m\to\infty} G^m = 0$.

Απόδειξη.

α) $\Longrightarrow$ β): Έστω ότι $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$. Σύμφωνα με την (3.67), τότε, για $x \in \mathbb{C}^n$, $G^m(x^{(0)} - x) \to 0$, $m \to \infty$. Για οποιοδήποτε δεδομένο $y \in \mathbb{C}^n$, έστω $x^{(0)} := y+x$. Τότε η προηγούμενη συνθήκη γράφεται ως $G^m y \to 0$, $m \to \infty$, για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$. Έστω τώρα λ μια ιδιοτιμή του G και z το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε $G^m z = \lambda^m z$, $m \in \mathbb{N}_0$. Επειδή όμως $G^m z \to 0$, $m \to \infty$, για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^n$ έχουμε

$$\|G^m z\| \to 0 \Longrightarrow |\lambda|^m \|z\| \to 0 \Longrightarrow |\lambda| < 1.$$

Συνεπώς, $\rho(G) = \max\limits_i |\lambda_i(G)| < 1$.

β) $\Longrightarrow$ γ): Έστω $\rho(G) < 1$ και ε θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $0 < \varepsilon < 1 - \rho(G)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2, υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^{n,n}$ τέτοια ώστε $\|G\| \le \rho(G) + \varepsilon < 1$.

γ) $\Longrightarrow$ δ): Αν $\|G\| < 1$, επειδή $\|G^m\| = \|G \cdot G \cdots G\| \le \|G\|^m$, έχουμε $\|G^m\| \to 0 \iff G^m \to 0,\ m \to \infty$.

δ) $\Longrightarrow$ α): Αν $G^m \to 0,\ m \to \infty$, για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^n$ (και αντίστοιχη παραγόμενη φυσική νόρμα πινάκων) έχουμε, για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, $x^{(m)} \to x,\ m \to \infty$, λόγω της (3.67). $\square$

Η νόρμα $\|\cdot\|$ της συνθήκης γ) του Θεωρήματος 3.4 μπορεί βέβαια να μην είναι μια από τις γνωστές μας νόρμες. Παραδείγματος χάριν, αν

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε $\|G\|_\infty = \|G\|_1 = \|G\|_2 = 2$, αλλά $\lambda_1(G) = \lambda_2(G) = 0$, δηλαδή $\rho(G) = 0$. Συνεπώς, μια επαναληπτική μέθοδος με πίνακα επανάληψης G συγκλίνει. (Μάλιστα εδώ $G^2 = 0$ και συνεπώς $G^m = 0,\ m \ge 2$.)

Στην πράξη, η αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$ της λύσης επιλέγεται αυθαίρετα (π.χ. $x^{(0)} = 0$), εκτός βέβαια αν έχουμε κάποια άλλη, καλύτερη προσέγγιση της x. Ένα συνηθισμένο "κριτήριο τερματισμού" είναι της μορφής

$$\left\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\right\| \le \varepsilon,$$

για δεδομένο $\varepsilon > 0$. (Δεν είναι δύσκολο να δούμε, βλ. Άσκηση 3.43, ότι αν ο πίνακας επανάληψης της μεθόδου έχει $\|G\| = \sigma < 1$, τότε

$$\left\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\right\| \le \varepsilon \Longrightarrow \left\|x^{(N)} - x\right\| \le \frac{\varepsilon\,\sigma}{1-\sigma}.)$$

Μετά το προηγούμενο γενικό θεώρημα σύγκλισης για τη γενική επαναληπτική μέθοδο (3.64), ας επιστρέψουμε στις μεθόδους του Jacobi και των Gauss–Seidel για να μελετήσουμε περιπτώσεις πινάκων A για τους οποίους οι μέθοδοι αυτές συγκλίνουν. Το αντικείμενο μιας τέτοιας μελέτης είναι να βρούμε π.χ. ικανές συνθήκες για τον A έτσι ώστε να ισχύει μια από τις ισοδύναμες συνθήκες β) ή γ) του Θεωρήματος 3.4.

Θυμόμαστε ότι ο A έχει *αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο*, αν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.71}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι μέθοδοι του Jacobi και των Gauss–Seidel συγκλίνουν για συστήματα $Ax = b$, αν ο πίνακας A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

Σελ. 129-131

Πρόταση 3.3 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τότε*

α) *Οι πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$, $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss–Seidel, αντίστοιχα, ικανοποιούν τις ανισότητες $\|G_J\|_\infty < 1$, $\|G_{GS}\|_\infty < 1$.*

β) *Οι μέθοδοι του Jacobi και των Gauss–Seidel συγκλίνουν.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε κατ' αρχάς ότι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Επίσης έχει μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, συνεπώς οι συγκεκριμένες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοσθούν.

α) Έστω

$$C := \max_{1\le i\le n}\left[\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|\right].$$

Η υπόθεσή μας (3.71) δίνει ότι $C < 1$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\|G_J\|_\infty = C$ και $\|G_{GS}\|_\infty \le C$. Στην περίπτωση της μεθόδου του Jacobi η απόδειξη είναι άμεση και πολύ εύκολη, αφού ο υπολογισμός του D^{-1}, και συνεπώς και του G_J, δεν παρουσιάζει καμμία δυσκολία, ενώ στην περίπτωση της μεθόδου των Gauss–Seidel για να παρακάμψουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού του πίνακα $(L+D)^{-1}$ θα καταφύγουμε σε έναν έμμεσο τρόπο απόδειξης.

Συγκεκριμένα, για τη μέθοδο του Jacobi έχουμε αμέσως

$$\|G_J\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = C < 1.$$

Όσον αφορά τη μέθοδο των Gauss–Seidel, θεωρούμε, για $y \in \mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $u = G_{GS}\,y$, για το οποίο ισχύει

$$(L+D)u = -Uy,$$

δηλαδή

$$u_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,u_j - \sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\,y_j\right],\quad i=1,\dots,n. \tag{3.75}$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ως προς i ότι

$$|u_i| \le C\,\|y\|_\infty, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.76}$$

Για $i = 1$ έχουμε κατ' αρχάς

$$|u_1| = \frac{1}{|a_{11}|}\Big|\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\,y_j\Big| \le C\,\|y\|_\infty.$$

Υποθέτοντας τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $1, \dots, i-1$, έχουμε

$$\begin{aligned}|u_i| &\le \frac{1}{|a_{ii}|}\Big[\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\,|u_j| + \sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\,|y_j|\Big]\\ &\le \|y\|_\infty \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \le C\,\|y\|_\infty,\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ανισότητα ισχύει λόγω $C < 1$. Αποδείξαμε έτσι την (3.76), η οποία γράφεται και στη μορφή

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|u\|_\infty = \|G_{GS}y\|_\infty \le C\,\|y\|_\infty.$$

Άρα, ισχύει η ζητούμενη εκτίμηση $\|G_{GS}\|_\infty \le C < 1$, που ολοκληρώνει την απόδειξη της α).

Η β) έπεται αμέσως από την α) βάσει του Θεωρήματος 3.4. □

Η συνθήκη της *αυστηρά* κυριαρχικής διαγωνίου (3.71) είναι βέβαια αρκετά περιοριστική. Λίγο ασθενέστερη είναι η συνθήκη της *κυριαρχικής διαγωνίου*, η οποία απαιτεί

$$\begin{cases} |a_{ii}| \ge \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}|a_{ij}|, \quad 1 \le i \le n,\\ \text{με αυστηρή ανισότητα για ένα τουλάχιστον } i. \end{cases} \tag{3.77}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι ο A έχει κυριαρχική διαγώνιο και με την επί πλέον υπόθεση ότι *δεν ανάγεται*, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει πίνακας μετάθεσης P που να επιτρέπει να γραφεί ο PAP^T στη μορφή

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix},$$

για κάποιον $r \times r$ υποπίνακα A_{11}, $1 \le r < n$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι και οι δύο μέθοδοι του Jacobi και των Gauss–Seidel συγκλίνουν. (Παράδειγμα πίνακα που δεν ανάγεται είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, την υπερ– και την υποδιαγώνιό του.)

Άλλη μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πινάκων, από την άποψη των πρακτικών εφαρμογών, είναι οι συμμετρικοί, θετικά ορισμένοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Γι' αυτούς, μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει, αλλά ότι η μέθοδος του Jacobi δεν συγκλίνει γενικά (βλ. Άσκηση 3.48).

2) Μέθοδος Jacobi από

http://appliedmaths.ee.duth.gr/e-learning/f21ynumanal/course/5_week/frame.htm

Δ.Α. Γεωργίου (Ξάνθη 2000) – Αριθμητική Ανάλυση και Εφαρμογές – Εταιρεία Αξιοποίησης και Διαχείρισης Περιουσίας Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης (Ξάνθη)

5.2 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ (Μέθοδος JACOBI).

Η μέθοδος Jacobi δεν συγκλίνει πάντα. Ισχύουν βέβαια και εδώ όσα γενικά αναφέρονται για τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων στην παράγραφο 3.1.
Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε τις λύσεις του συστήματος Ax = β (1) ως διανύσματα, η ακολουθία $u^{(0)}$,$u^{(1)}$,$u^{(2)}$, ... που προκύπτει από τη σχέση

$$u_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, u_j^{(k)} + c_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

είναι μια ακολουθία διανυσμάτων που συγκλίνει στο διάνυσμα - λύση x της (1) εάν και μόνο εάν

$$\lim_{m\to\infty} \| x - u^{(m)} \| = 0$$

Εδώ ||.|| συμβολίζει την τυχούσα norm διανύσματος.

Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.2, θα πρέπει να δείξουμε εδώ ότι ο τελεστής B στη σχέση

x = Bx +C, είναι τελεστής συστολής. Πρέπει δηλαδή να ισχύει για κάθε διάνυσμα y και z.

$$||(By+C) -(Bz+c)|| \leq K \|y-z\|$$

όπου K < 1 . Επειδή (By+c)-(Bz+c) = By-Bz = B(y-z) ,
ισχύει

$$||(By+C) -(Bz+c)|| = ||B(y-z)|| \leq ||B||\ ||y-z||$$

' Έτσι προκύπτει ότι για να συγκλίνει η μέθοδος Jacobi θα πρέπει να ισχύει ||B|| <1.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 5.2.1

Αν ο πίνακας A στο σύστημα Ax = β έχει επικρατούσα διαγώνιο (ως προς τις στήλες) τότε η επαναληπτική μέθοδος Jacobi συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει γιατί εξορισμού

$$\sum_{j\neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \qquad \text{για} \quad i = 1,\dots,n$$

Έτσι

$$\|B\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j\neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

3) Σύγκλιση της μεθόδου Jacobi από

http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method

Convergence

The method will always converge if the matrix *A* is strictly or irreducibly diagonally dominant. Strict row diagonal dominance means that for each row, the absolute value of the diagonal term is greater than the sum of absolute values of other terms:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

A second convergence condition is when the spectral radius of the iteration matrix

$$\rho(D^{-1}R) < 1.$$

The Jacobi method sometimes converges even if these conditions are not satisfied.

Recently, a double-loop technique was introduced to force convergence of the Jacobi algorithm to the correct solution even when the sufficient conditions for convergence do not hold. The double loop technique works for either positive definite or column dependent matrices.[1]