



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων
Εξάμηνο 8 - 2012

Σειρά Ασκήσεων 6

1. Να βρεθεί το ανάπτυσμα σε σειρά DFS της ακολουθίας $\tilde{x}(n) = A \cos(n\pi/2)$.
2. Έστω το ακόλουθο περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t) = A \cos(200\pi t) + A \cos(500\pi t)$, το οποίο υφίσταται δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = 1\text{ KHz}$. Να βρεθούν οι συντελεστές της σειράς DFS του σήματος που προκύπτει μετά τη δειγματοληψία.
3. Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός DFT N σημείων κάθε μιας από τις παρακάτω ακολουθίες:
 - a) $x_1(n) = \delta(n)$
 - b) $x_2(n) = \delta(n - n_0)$, όπου $0 < n_0 < N$
 - c) $x_3(n) = a^n$, για κάθε $0 \leq n < N$
 - d) $x_4(n) = u(n) - u(n - n_0)$, όπου $0 < n_0 < N$
 - e) $x_5(n) = \cos(n\omega_0)$, για κάθε $0 \leq n \leq N - 1$
4. Έστω η ακολουθία $x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n - 1) + 2\delta(n - 2) + \delta(n - 3)$. Έστω $X(k)$ ο μετασχηματισμός DFT 6-σημείων της $x(n)$.
 - a) Να βρεθεί η ακολουθία πεπερασμένου μήκους $y(n)$, που έχει μετασχηματισμό DFT 6-σημείων $Y(k) = W_6^{4k} X(k)$.
 - b) Να βρεθεί η ακολουθία πεπερασμένου μήκους $w(n)$, που έχει μετασχηματισμό DFT 6-σημείων $W(k) = \text{Re}\{X(k)\}$.
 - c) Να βρεθεί η ακολουθία πεπερασμένου μήκους $q(n)$, που έχει μετασχηματισμό DFT 3-σημείων $Q(k) = X(2k)$, $\forall k = 0, 1, 2$.
5. Έστω η ακολουθία $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 2) + \delta(n - 3)$.
 - a) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός DFT 4-σημείων της $x(n)$.
 - b) Αν $y(n)$ είναι η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων της $x(n)$ με τον εαυτό της, να βρεθεί η $y(n)$ καθώς και ο μετασχηματισμός DFT 4-σημείων $Y(k)$.
 - c) Με $h(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + 2\delta(n - 3)$, να βρεθεί η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων της $x(n)$ με την $h(n)$.
6. Θεωρούμε τις παρακάτω δύο ακολουθίες:

$$x(n) = \delta(n) + 3\delta(n - 1) + 3\delta(n - 2) + 2\delta(n - 3)$$

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \delta(n - 3)$$

Σχηματίζουμε το γινόμενο $Y(k) = H(k)X(k)$, όπου $H(k)$ και $X(k)$ είναι οι μετασχηματισμοί DFT 5-σημείων των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$, αντίστοιχα. Να βρεθεί η ακολουθία $y(n)$ που προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό DFT της $Y(k)$.

7. Η κρουστική απόκριση ενός φίλτρου με έναν πόλο είναι $h(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$. Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου αυτού υφίσταται δειγματοληψία στις συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/16$ για $k = 0, 1, \dots, 15$. Τα δειγματα που προκύπτουν είναι:

$$G(k) = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/16} \quad k = 0, 1, \dots, 15$$

Να βρεθεί η ακολουθία $g(n)$, που είναι ο αντίστροφος DFT 16-σημείων της $G(k)$.

8. Τα ζυγά δειγματα ενός DFT 11-σημείων $X(k)$ μιας πραγματικής ακολουθίας $x(n)$ είναι τα ακόλουθα: $X(0) = 12.61, X(2) = 2.49 - j19.12, X(4) = -12.44 + j12.70, X(6) = -7.55 + j13.69, X(8) = -3.34 + j3.69, X(10) = 1.50 - j5.31$. Υπολογίστε τα περιττά δείγματα του $X(k)$.

9. Έστω $X(e^{j\omega})$ ο DTFT της ακολουθίας 9 σημείων $x(n) = \{1, -3, 4, -5, 7, -5, 4, -3, 1\}$.

α) Ο DFT $X_1(k)$ προκύπτει από δειγματοληψία του $X(e^{j\omega})$ σε ομοιόμορφα διαστήματα $\pi/6$ ξεκινώντας από $\omega = 0$. Υπολογίστε το $x_1(n)$ χωρίς να υπολογίσετε τα $X(e^{j\omega})$ και $X_1(k)$. Μπορείτε να ανακτήσετε τη $x(n)$ από τη $x_1(n)$;

β) Ο DFT $X_2(k)$ προκύπτει από δειγματοληψία του $X(e^{j\omega})$ σε ομοιόμορφα διαστήματα $\pi/4$ ξεκινώντας από $\omega = 0$. Υπολογίστε το $x_2(n)$ χωρίς να υπολογίσετε τα $X(e^{j\omega})$ και $X_2(k)$. Μπορείτε να ανακτήσετε τη $x(n)$ από τη $x_2(n)$;

10. Δύο ακολουθίες $x_1(n)$ και $x_2(n)$ που μηδενίζονται έξω από το διάστημα $[0,99]$ συνδέονται με κυκλική συνέλιξη για να προκύψει η ακολουθία $y(n) = x(n) \circledast h(n)$ με $N = 100$. Αν η ακολουθία $x_1(n)$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο για το διάστημα $10 \leq n \leq 39$, να προσδιοριστούν οι τιμές του n για τις οποίες η $y(n)$ είναι βέβαιο ότι ισούται με τη γραμμική συνέλιξη των $x_1(n)$ και $x_2(n)$.