ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ: ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Κεφάλαιο 1. Μιγαδικές Συναρτήσεις.

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x + iy$. $|e^z| = e^x$.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} . \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} . \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} .$$

$\log z = \log r + i\theta$, $r = |z|$, θ = Argz το όρισμα $z = x + iy$

$-\pi < \theta \leq \pi$.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} .$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} .$$

Θεώρημα. (του Laurent)

Εστω c_1, c_2 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο z_0 και ακτίνες r_1, r_2 αντιστοίχως. (μπορεί $r_1 = 0$, είτε $r_2 = +\infty$) Υποθέτουμε ότι η $f(z)$ είναι μονότιμη και αναλυτική στον δακτύλιο

$$R = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < | z - z_0| < r_2 \} .$$

Τότε η $f(z)$ μπορεί να γραφτεί κατά ένα μόνο τρόπο ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

$$= \ldots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz , \qquad k \in \mathbb{Z} ,$$

όπου c οποιαδήποτε καμπύλη μεταξύ των c_1 και c_2 .

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0 \implies z_0 \text{ πόλος τάξεως } k .$$

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots)$$

όπου a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, ... ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ εάν το z_0 είναι απλός πόλος (τάξεως 1) .

$$a_{-1} = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right)$$

εάν το z_0 είναι πόλος τάξεως k .

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)dt,$ $\qquad F$ συνεχής ως προς t

Με $z = e^{it} = \cos t + i\sin t \implies \bar{z} = z^{-1} = \cos t - i\sin t \implies$

$$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z} , \qquad \sin t = \frac{z^2 - 1}{2iz} , \qquad dt = \frac{1}{iz} dz , \qquad \text{Αρα}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)dt = \oint_c F\left(\frac{z^2 + 1}{2z} , \frac{z^2 - 1}{2iz} \right) \frac{1}{iz} dz ,$$

Οπου c ο κύκλος c: $z(t) = \cos t + i\sin t$, $t \in [0 , 2\pi]$.

Υποθέτουμε:

A. η $\frac{h(x)}{g(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, και τα πολυώνυμα h g έχουν πραγματικούς συντελεστές

B. το $g(x)$ έχει στο άνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ τις μή πραγματικές ρίζες z_1, z_2, ... , z_n .

---

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, dx$ όπου

(1). βαθμός $h(x) \le$ βαθμός $g(x) - 2$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{h(x)}{g(x)} , z_k \right) .$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax}\, dx$, $a > 0$.

(1). βαθμός $h(x) \le$ βαθμός $g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax} , z_k \right) .$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax}\, dx$, $a > 0$.

(1). βαθμός $h(x) \le$ βαθμός $g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ έχει απλές πραγματικές ρίζες, $x_1, x_2, \dots, x_m$

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax} dx = \pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\left(\frac{h(x)}{g(x)}\, e^{iax}, x_k \right) + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, z_k \right)$$

Κεφάλαιο 2. Σειρές Fourier και Μετασχηματισμοί Fourier.

Σειρές Fourier.

Σειρά (ή ανάπτυγμα) Fourier της f ως προς B

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

"Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx , \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

f Αρτια $\quad b_n = 0\,, \qquad a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,.$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,.$$

f Περιττή $\quad a_n = 0\,, \qquad b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\,.$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,.$$

"Αντίστροφος Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$f_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

"Πεπερασμένος (Μιγαδικός) Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, e^{-in\pi x/L}\, dx$$

Μετασχηματισμος Fourier.

"Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier της F(ω)

$$f(x) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,,$$

(Μιγαδικός) Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Ολοκληρωτική Παράσταση (ή Ολοκληρωτικό Ανάπτυγμα ή Ολοκλήρωμα) Fourier της f .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt \qquad B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt$$

Με Αναδιανομή Συντελεστών έχουμε:

f Αρτια Συνημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f.

$B(\omega) = 0$ $\qquad A(\omega) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega\, t)\, dt$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega\, x)\, d\omega$$

f Περιττή Ημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f.

$A(\omega) = 0,$ $\qquad B(\omega) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega\, t)\, dt$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega\, x)\, d\omega$$

Συνέλιξη των συναρτήσεων f, g :

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du\ .$$

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = F(\omega)G(\omega)$$

$$f*g(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(F(\omega)G(\omega)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\, F(\omega)G(\omega)\, d\omega\ .$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) = i\omega\mathcal{F}(\upsilon) \qquad\qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) = i\omega\mathcal{F}(\upsilon)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}\right) = -\omega^2\mathcal{F}(\upsilon) \qquad\qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(\upsilon)$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Ὁ κατωτέρω πίνακας συμπεριλαμβάνει τοὺς μετασχηματισμοὺς Laplace δεδομένων συναρτήσεων, ποὺ ἐμφανίζονται συχνὰ στὴ πράξη.

	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	1	$1/s$
2	$t^n,\ n=1,2,\ldots$	$n!/s^{n+1}$
3	$e^{\alpha t}$	$1/(s-\alpha)$
4	$t^n e^{\alpha t},\ n=1,2,\ldots$	$n!/(s-\alpha)^{n+1}$
5	$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
6	$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
7	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\omega/[(s-\alpha)^2+\omega^2]$
8	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$(s-\alpha)/[(s-\alpha)^2+\omega^2]$
9	$t\sin\omega t$	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
10	$t\cos\omega t$	$(s^2-\omega^2)/(s^2+\omega^2)^2$
11	$\sinh bt$	$b/(s^2-b^2)$
12	$\cosh bt$	$s/(s^2-b^2)$
13	$e^{\alpha t}\sinh bt$	$b/[(s-\alpha)^2-b^2]$
14	$e^{\alpha t}\cosh bt$	$(s-\alpha)/[(s-\alpha)^2-b^2]$
15	$t\sinh\omega t$	$2\omega s/(s^2-\omega^2)^2$
16	$t\cosh\omega t$	$(s^2+\omega^2)/(s^2-\omega^2)^2$