Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

Άσκηση

Θεωρείστε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$Y(s)=\frac{1}{a_4 s^3+a3s^2+a_2 s+a_0}U(s)$$

όπου οι αριθμοί $α_ι$ αντιστοιχούν στους αντίστοιχους αριθμούς των 4 πρώτων

γραμμάτων του επιθέτου σας (π.χ. για το επίθετο Κοσματόπουλος, οι αριθμοί $α_ι$ θα είναι $a_4=10, a3=15, a_2=18, a_0=12$).

1. Να βρείτε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος.

2. Να αναπτύξετε πηγαίο κώδικα σε matlab ο οποίος, δεδομένου του κριτηρίου κόστους (δηλαδή δεδομένων των 2 πινάκων σχεδίασης που ορίζουν το κριτήριο κόστους

$$J=\int_0^\infty \left(x^T(s)Qx(s)+u^T(s)Ru(s)\right)ds$$

θα υπολογίζει τον ελεγκτή που ελαχιστοποιεί το παραπάνω κόστος και θα προσομοιώνει το σύστημα κλειστού βρόχου.

3. Να σχεδιασθούν οι πίνακες του κριτηρίου κόστους έτσι ώστε για όλες τις αρχικές καταστάσεις που ικανοποιούν την σχέση $|x(0)|<3$, να επιτυγχάνεται η «καλύτερη» δυνατή σύγκλιση του διανύσματος κατάστασης υπό τον περιορισμό ότι το διάνυσμα ελέγχου δεν γίνεται <u>ποτέ</u> μεγαλύτερο (σε απόλυτη τιμή) από 1.

4. Να ελέγξετε (θεωρητικά και μέσω προσομοιώσεων) για ποιες τιμές του γ>0, ο «υπο-βέλτιστος» ελεγκτής

$$u=-\gamma R^{-1}B^T P$$
$$Q=-PA-A^T P+PBR^{-1}B^T P$$

παράγει ευσταθείς λύσεις κλειστού βρόχου. Συμφωνούν τα θεωρητικά με τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, και αν όχι γιατί;

σσ. Στην θεωρητική ανάλυση να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση Lyapunov

$V(x)=x^T Px$ και να γίνει χρήση των παρακάτω αποτελεσμάτων

$$P>0, PBR^{-1}B^T P\geq 0$$

5. Να προσομοιώσετε όλους τους παραπάνω ελεγκτές που σχεδιάσατε (α) κάνοντας χρήση παρατηρητή (δηλαδή θεωρώντας ότι μόνο η κατάσταση είναι x_1 διαθέσιμη προς μέτρηση) και (β) εισάγοντας «κορεστή» (δηλαδή το σήμα ελέγχου σε περιπτώσεις που γίνεται μεγαλύτερο – σε απόλυτη τιμή από 1 – το «επαναφέρουμε» στην τιμή +1 ή -1).

6. Να εισάγεται στο σύστημα διαταραχές (δηλαδή το σύστημά μας λαμβάνει τώρα την μορφή $\dot{x} = Ax + Bu + w$) και να ελέγξετε (θεωρητικά και μέσω προσομοιώσεων) τη σύγκλιση του συστήματος κλειστού βρόχου (για τον ελεγκτή του ερωτήματος 4) για διαφορετικά εύρη διαταραχών και διαφορετικές τιμές του γ.

Ορισμοί και Χρήσιμες Ιδιότητες

(Π1) $\lambda(A)$ είναι το διάνυσμα ιδιοτιμών του πίνακα *A*

(Π2) $|\mathrm{x}|=\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)}$

(Π3) Η «ιδιότητα του τριγώνου»: για οποιαδήποτε διανύσματα x, y ισχύει ότι

$$x^T y \leq \frac{1}{2}|x|^2+\frac{1}{2}|y|^2$$

(Π4) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται θετικά ορισμένος (συμβολικά A>0) όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$A>0 \Leftrightarrow x^T A x>0, \forall x \neq 0$$

(Π5) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται θετικά ορισμένος (συμβολικά A≥0) όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$A \geq 0 \Leftrightarrow x^T A x \geq 0, \forall x \neq 0$$

(Π6) Ιδιότητες Θετικά Ορισμένων και Ημι-Ορισμένων Πινάκων:

(Π6.1) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και θετικές.

(Π6.2) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}>0.$

(Π6.3) Αν ο A είναι θετικά ημι-ορισμένος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και μη-αρνητικές.

(Π6.4) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος ή ημι-ορισμένος ισχύει ότι $\lambda_{\min}(A)|x|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)|x|^2, \forall x$, όπου $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ είναι η ελάχιστη και η μέγιστη αντίστοιχα ιδιοτιμή του πίνακα A **[Τι πρόσημο έχουν οι ιδιοτιμές $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ και γιατί;]**.

(Π7) Για δυό πίνακες A, B έχουμε ότι $(AB)^T=B^T A^T$.

1.1 Γραμμικός Τετραγωνικός Έλεγχος

Θεωρείστε το Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΑΧ) σύστημα

$$\dot{x}=Ax+Bu, x \in \Re^n, u \in \Re^m$$

ο ελεγκτής που ελαχιστοποιεί το κριτήριο κόστους *J* υπολογίζεται ως εξής:

$$u=-R^{-1} B^T P x$$
$$Q=-PA-A^T P+PBR^{-1} B^T P$$

η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης (αλγεβρική εξίσωση Riccati) μπορεί να επιλυθεί κάνοντας χρήση της συνάρτησης care της matlab.

1.2 Παρατηρητής

Θεωρείστε το Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΑΧ) σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \Re^n, u \in \Re^m$$

$$y = Cx, y \in \Re^k$$

Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω σύστημα, το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι διαθέσιμο. Ένας παρατηρητής για το παραπάνω σύστημα είναι ο παρακάτω:

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

$$L = -\Phi^{-1}CX$$

$$\Psi = -XA - A^T X + XC^T \Phi^{-1} CX$$

η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης (αλγεβρική εξίσωση Riccati) μπορεί να επιλυθεί κάνοντας χρήση της συνάρτησης care της matlab.

Στην περίπτωση που το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι διαθέσιμο, ο ελεγκτής μπορεί να πάρει τη μορφή

$$u = -R^{-1}B^T P\hat{x}$$

Όπου όλες οι ποσότητες έχουν ορισθεί παραπάνω.

1.3 Ευρωστία Ελεγκτών

Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, w), x \in \Re^n, w \in \Re^m$$

όπου x, w είναι το διάνυσμα κατάστασης και εξωγενών διαταραχών, αντίστοιχα. Το διάνυσμα εξωγενών διαταραχών μπορεί να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο αλλά πεπερασμένο, δηλαδή

$$w_{\max} = \max_t |w(t)| < \infty .$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση (συνάρτηση Lyapunov) $V(x), V: \Re^n \to \Re$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $V(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0, V(0) > 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $V(x) \to \infty \Leftrightarrow |x| \to \infty$

3. $\dot{V}(x)=\frac{\partial V^T(x)}{\partial x}f(x,w)<0,\forall x\notin\aleph,\forall w$, όπου το $\aleph$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\Re^n$ το οποίο εμπεριέχει το σημείο $x=0$.

Τότε, ισχύει ότι για κάθε αρχική τιμή $x(0)$, το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ θα εισέλθει στο υποσύνολο $\aleph$ και θα παραμείνει εκεί για πάντα.

1.3.1 Ευρωστία Ελεγκτών σε Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – Βαθμωτό Σύστημα

Έστω το βαθμωτό σύστημα

$$\dot{x}=(a+\Delta a)x+(b+\Delta b)u+w \tag{1}$$

όπου όλες οι ποσότητες στην παραπάνω εξίσωση είναι ΒΑΘΜΩΤΑ μεγέθη. Οι παράμετροι a,b αντιστοιχούν στις <u>ονομαστικές</u> (γνωστές) παραμέτρους του συστήματος, οι παράμετροι $\Delta a,\Delta b$ αντιστοιχούν στις (άγνωστες αλλά σταθερές) <u>παραμετρικές αβεβαιότητες</u> του συστήματος, ενώ το (άγνωστο και χρονικά μεταβαλλόμενο) μέγεθος w αντιστοιχεί στις <u>εξωγενείς διαταραχές</u>. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν σχεδιασθεί ένας ελεγκτής για το «ονομαστικό» σύστημα

$$\dot{x}=ax+bu$$

κατά πόσο αυτός ο ελεγκτής θα είναι αποτελεσματικός για το «πραγματικό» σύστημα (1). Έστω λοιπόν ο ελεγκτής

$$u=-Kx$$

ο οποίος, για να είναι αποτελεσματικός για το «ονομαστικό» σύστημα, θα πρέπει το κέρδος του K να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση [**γιατί;**]

$$(a-bK)<0$$

Η ανάλυση της αποτελεσματικότητας του παραπάνω ελεγκτή για το πραγματικό σύστημα θα γίνει μέσω της παρακάτω συνάρτησης Lyapunov **[γιατί η παρακάτω συνάρτηση είναι συνάρτηση Lyapunov;]**

$$V=\frac{1}{2}x^2$$

Έχουμε ότι

$$\dot{V} = \left(a + \Delta a - bK - \Delta bK\right)x^2 + wx$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας (Π3), έχουμε ότι

$$\dot{V} \le \left(a + \Delta a - bK - \Delta bK\right)x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}w^2 = \left(a + \Delta a + \frac{1}{2} - bK - \Delta bK\right)x^2 + \frac{1}{2}w^2$$
$$\le \Phi x^2 + \frac{1}{2}w^2_{\max}$$

όπου $\Phi = \left(a + \Delta a + \frac{1}{2} - bK - \Delta bK\right)$. Για να ισχύει το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov, θα πρέπει $\Phi < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση (δηλαδή αν $\Phi < 0$) έχουμε ότι (σύμφωνα με το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov) η κατάσταση x θα εισέλθει – και θα παραμείνει για πάντα – στο σύνολο $\aleph = \left\{ x : |x| \le \frac{w_{\max}}{\sqrt{-2\Phi}} \right\}$. **[γιατί;]**

1.3.1 Ευρωστία Ελεγκτών σε Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – Πολυδιάστατο Σύστημα

Τώρα εξετάζουμε την επέκταση των παραπάνω σε μη-βαθμωτά συστήματα. Παρόμοια με την παράγραφο 1.3.1 υποθέτουμε ότι το πραγματικό σύστημα είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + w, x \in \Re^n, u \in \Re^m, w \in \Re^n \tag{2}$$

Όπως και στην παράγραφο 1.3.1, οι πίνακες A, B αντιστοιχούν στις ονομαστικές (γνωστές) παραμέτρους του συστήματος, οι πίνακες $\Delta A, \Delta B$ αντιστοιχούν στις (άγνωστες αλλά σταθερές) παραμετρικές αβεβαιότητες του συστήματος, ενώ το (άγνωστο και χρονικά μεταβαλλόμενο) διάνυσμα w αντιστοιχεί στις εξωγενείς διαταραχές.

Το ερώτημα που τίθεται και εδώ είναι αν σχεδιασθεί ένας ελεγκτής για το «ονομαστικό» σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

κατά πόσο αυτός ο ελεγκτής θα είναι αποτελεσματικός για το «πραγματικό» σύστημα (2). Έστω λοιπόν ο ελεγκτής

$$u = -Kx$$

ο οποίος, για να είναι αποτελεσματικός για το «ονομαστικό» σύστημα, θα πρέπει ο πίνακας κέρδους να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση [**γιατί;**]

$$(A - BK)^T P + (A - BK)P = -Q$$

για κάποιους θετικά ορισμένους πίνακες P και Q. Συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι ότι αν ορίσουμε σαν συνάρτηση Lyapunov την συνάρτηση **[γιατί η παρακάτω συνάρτηση είναι συνάρτηση Lyapunov;]**

$$V = x^T P x$$

τότε (για την περίπτωση του ονομαστικού συστήματος) έχουμε ότι **[γιατί;]**

$$\dot{V} = -x^T Q x$$

Τώρα, για την περίπτωση του πραγματικού συστήματος έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \big((A+\Delta A)x - (B+\Delta B)Kx + w\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A)x - (B+\Delta B)Kx + w\big) \\
&= \big((A+\Delta A)x - (B+\Delta B)Kx\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A)x - (B+\Delta B)Kx\big) + w^T Px + x^T Pw \\
&= \big((A+\Delta A - BK - \Delta BK)x\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A - BK - \Delta BK)x\big) + w^T Px + x^T Pw \\
&= x^T \left\{(A+\Delta A - BK - \Delta BK)^T P + P(A+\Delta A - BK - \Delta BK)\right\} x + w^T Px + x^T Pw \\
&= x^T \left\{(A+\Delta A - BK - \Delta BK)^T P + P(A+\Delta A - BK - \Delta BK)\right\} x + w^T Px + x^T Pw \qquad \mathbf{(\Pi 7)} \\
&\le x^T \left\{(A+\Delta A - BK - \Delta BK)^T P + P(A+\Delta A - BK - \Delta BK)\right\} x + |w|^2 + |P||x|^2 \qquad \mathbf{(\Pi 3)} \\
&\le x^T \left\{(A+\Delta A - BK - \Delta BK)^T P + P(A+\Delta A - BK - \Delta BK) + |P| I\right\} x + |w|^2 \\
&= x^T \Phi x + |w|^2
\end{aligned}$$

όπου

$$\Phi = \left\{(A+\Delta A - BK - \Delta BK)^T P + P(A+\Delta A - BK - \Delta BK) + |P| I\right\}$$

Για να ισχύει το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov, θα πρέπει $\Phi < 0$ (δηλαδή ο πίνακας $-\Phi$ θα πρέπει να είναι θετικά ορισμένος). Σε αυτήν την περίπτωση (δηλαδή αν $\Phi < 0$) έχουμε ότι (σύμφωνα με το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov) η κατάσταση x θα εισέλθει – και θα παραμείνει για πάντα – στο σύνολο $\aleph = \left\{ x : |x| \le \dfrac{w_{\max}}{\sqrt{-\lambda_{\min}(\Phi)}} \right\}$. **[γιατί;]**