# Ασκήσεις Εργασίας στο Μάθημα

# Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές

**Α.Ε. 2008-09**

1. Να λυθεί η Εξίσωση Διαφορών:

$$x_{n+1} = 2^{-2n}\, x_n + 2^{-n^2}\,.$$

**Λύση.** Για τα γινόμενα έχουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{p=s+1}^{n-1} a_p &= \prod_{p=s+1}^{n-1} 2^{-2p} = \prod_{p=s+1}^{n-1} (2^{-2})^p = (2^{-2})^{(s+1)+(s+2)+(s+3)+(n-1)} \\
&= (2^{-2})^{\frac{(s+n)(n-1-s)}{2}} = (2^{-1})^{(s+n)(n-1-s)} = 2^{(s+n)(s+1-n)} \\
&= 2^{s^2+s+n-n^2)} \\
\prod_{p=1}^{n-1} a_p &= 2^{n-n^2}
\end{aligned}$$

και η λύση είναι

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(\prod_{p=1}^{n-1} a_p\right) x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \left(\prod_{p=s+1}^{n-1} a_p\right) b_s \\
&= 2^{n-n^2}\, x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} 2^{s^2+s+n-n^2}\, 2^{-s^2} = 2^{n-n^2}\, x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} 2^{s+n-n^2} \\
&= 2^{n-n^2}\, x_0 + 2^{n-n^2} \sum_{s=0}^{n-1} 2^s = 2^{n-n^2} \left(x_0 + \frac{2^n-1}{2-1}\right) \\
&= 2^{n-n^2}\, (x_0 + 2^n - 1)\,.
\end{aligned}$$

2. Να βρεθούν οι ακολουθίες Fibonacci.

**Λύση.** Για να βρούμε όλες τις ακολουθίες Fibonacci πρέπει να λύσουμε την Εξίσωση Διαφορών

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \tag{1}$$

Η (1) είναι γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές και έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

με ρίζες

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Συνεπώς έχει γενική λύση

$$x_n = c_1\rho_1^n + c_2\rho_2^n = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Από εδώ, με $n = 0,\, 1$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & = & c_1 + c_2 \\ x_1 & = & \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 \end{array} \right\} \tag{2}$$

Το (2) με αγνώστους $c_1, c_2$ έχει ορίζουσα

$$D = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{array}\right] = \sqrt{5} \neq 0$$

και λύση

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\rho_2\, x_0 - x_1\Big) \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(x_1 - \rho_1 x_0\Big) \end{aligned}$$

άρα

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\rho_2 x_0 - x_1\Big)\,\rho_1^n + \Big(x_1 - \rho_1 x_0\Big)\,\rho_2^n\Big].$$

Για παράδειγμα, η ακολουθία με τους δύο πρώτους όρους $x_0 = 1,\, x_1 = 0$ που είναι η

$$1\,,\,0\,,\,1,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots$$

έχει γενικό όρο

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\rho_2 - 0\Big)\,\rho_1^n + \Big(0 - \rho_1\Big)\,\rho_2^n\Big] = \frac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{5}}\Big[\,\rho_1^{n-1} - \rho_2^{n-1}\Big] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\Big[\,\rho_1^{n-1} - \rho_2^{n-1}\Big]. \end{aligned}$$

και ο γενικός όρος δίνει

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{-1}-\rho_2^{-1}\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2\rho_1} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ \frac{\sqrt{5}}{-1} = 1 \\
x_1 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{0}-\rho_2^{0}\right] = 0\,. \\
x_2 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{1}-\rho_2^{1}\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{5}) = 1 \\
x_3 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{2}-\rho_2^{2}\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1-\rho_2\right]\left[\rho_1+\rho_2\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(-\sqrt{5})\cdot 1 = 1 \\
x_4 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{3}-\rho_2^{3}\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1-\rho_2\right]\left[\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2\right] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(-\sqrt{5})\left[(\rho_1+\rho_2)^2-\rho_1\rho_2\right] = 1^2-(-1) = 2 \\
x_5 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1^{4}-\rho_2^{4}\right] = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\rho_1-\rho_2\right]\left[\rho_1+\rho_2\right]\left[(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2\right] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(-\sqrt{5})\cdot 1\cdot\left[1^2-2(-1)\right] = 3
\end{aligned}$$

κ.λπ.

3. Να βρεθεί μια μερική λύση της

$$x_{n+2}-7\,x_{n+1}+10\,x_n = 3\cdot 2^n\,. \tag{3}$$

με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (3) είναι $\lambda^2-7\lambda+10$ και έχει ρίζες $\lambda_1=2\,,\lambda_2=5$. Το δεύτρο μέλος της (3) είναι της μορφής

$$3\cdot 2^n \;=\; \sum_1\ 3\ \cdot\ 2^n\ \Big[1\cdot cos\,(0\,n)\ +\ B_1\cdot sin\,(0\,n)\Big]$$

δηλαδή έχει $r_1=2,\ c_1=0,\ A_1=1,\ B_1$ τυχόν και συνεπώς το

$$r_1\Big[\ cos\,(c_k\,n)\ +i\,sin\,(c_k\,n)\Big] = 2$$

είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Άρα $s_k=1$ και έτσι η (3) θα έχει μια μερική λύση της μορφής:

$$x_n\;=\;\sum_1 n^1\,2^n\ \Big[a\cdot cos\,(0\,n)\ +\ B_1\,sin\,(0\,n)\Big] = a\,n\,2^n\,.$$

Με αντικατάσταση της $x_n\;=a\,2^n$ στην (3) έχουμε

$$a\,(n+2)\,2^{n+2}-7\,a\,(n+1)\,2^{n+1}+10\,a\,n\,2^n = 3\cdot 2^n\ \implies\ a=-\frac{1}{2}\,.$$

Έτσι μια μερική λύση της της (3) είναι η $y_n=-\frac{1}{2}\,n\,2^n$ .

4. Να βρεθεί μια μερική λύση της

$$x_{n+2} - 5\,x_{n+1} + 6\,x_n = cos\,\frac{n\pi}{2}\,. \tag{4}$$

με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (4) είναι $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ και έχει ρίζες $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3$. Το δεύτρο μέλος της (4) είναι της μορφής

$$cos\,\frac{n\pi}{2} \;\;=\;\; \sum_{1} \; 1\,\cdot\,1^n\,\Big[1\cdot cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) \;+\; 0\cdot sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)\Big]$$

δηλαδή έχει $r_1 = 1,\;\; c_1 = \frac{\pi}{2},\;\; A_1 = 1,\;\; B_1 = 0$ και συνεπώς το

$$1\Big[\,cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\; + i\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big] = 1$$

δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Άρα $s_k = 0$ και έτσι η (4) θα έχει μια μερική λύση της μορφής:

$$x_n \;=\; \sum_{1}\, n^0\,1^n\,\Big[a\cdot cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) \;+\; b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)\Big] = a\cdot cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) \;+\; b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)\,.$$

Με αντικατάσταση της $x_n \;= a{\cdot}cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) + b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)$ στην (4) έχουμε

$$\begin{aligned}
&a\,cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,(n+2)\Big) \;+\; b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,(n+2)\Big)\\
&-5\Big[a\,cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,(n+1) +\; b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,(n+1)\Big)\Big]\\
&+6\Big[a\,cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) \;+\; b\,sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)\Big] = cos\,\frac{n\pi}{2} \;\;\Longrightarrow\\
&\left\{\begin{array}{rcl} 5a - 5b & = & 1\\ 5a + 5b & = & 0 \end{array}\right\} \;\;\Longrightarrow\;\; \left\{\begin{array}{rcr} a & = & \frac{1}{10}\\ b & = & -\frac{1}{10} \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

Έτσι μια μερική λύση της της (4) είναι η

$$y_n = \frac{1}{10}\Big[\,cos\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big) \;-\; sin\,\Big(\frac{\pi}{2}\,n\Big)\Big]\,.$$

5. Να βρεθεί μια μερική λύση της Εξίσωσης Διαφορών

$$x_{n+2} - 5\,x_{n+1} + 6x_n = 2\,. \tag{6}$$

με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, άρα δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$u_n = 2^n\,, \qquad v_n = 3^n$$

Για μια μερική λύση της μη ομογενούς υπολογίζουμε της ορίζουσες

$$\begin{aligned} D_s &= \begin{vmatrix} 2^{s+1} & 3^{s+1} \\ 2^n & 3^n \end{vmatrix} = 3^n 2^{s+1} - 2^n 3^{s+1} \\ C_s &= \begin{vmatrix} 2^{s+1} & 3^{s+1} \\ 2^{s+2} & 3^{s+2} \end{vmatrix} = 2^{s+1} 3^{s+1} \end{aligned}$$

Μια μερική λύση της (6) είναι

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_s}{C_s} f_s = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^n 2^{k+1} - 2^n 3^{k+1}}{2^{k+1} 3^{k+1}} \cdot 2 \\ &= 2\left[3^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^s - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^s\right] = 3^n - 2^{n+1} + 1\,. \end{aligned}$$

6. Να βρεθεί μια μερική λύση της Εξίσωσης Διαφορών

$$x_{n+2} - 2\,x_{n+1} + x_n = 2\,. \tag{7}$$

με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$$

με ίσες ρίζες $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, άρα δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$u_n = 1^n = 1\,, \qquad v_n = n \cdot 1^n = n$$

Για μια μερική λύση της μη ομογενούς υπολογίζουμε της ορίζουσες

$$\begin{aligned} D_s &= \begin{vmatrix} 1 & s+1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n - s - 1 \\ C_s &= \begin{vmatrix} 1 & s+1 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Μια μερική λύση της (6) είναι

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_s}{C_s} f_s = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n-s-1}{1} \cdot 2 = 2\Big[\sum_{s=0}^{n-1} n - \sum_{s=0}^{n-1} s - \sum_{s=0}^{n-1} 1\Big] \\ &= 2\Big(n^2 - \frac{(n-1)n}{2} - n\Big) = 2n^2 - n^2 + n - 2n = n^2 - n \end{aligned}$$

7. Να δειχθεί ότι η $x_n = n$ είναι λύση της

$$n(n+1)\, x_{n+2} - 5\, n(n+2)\, x_{n+1} + 4\,(n+1)(n+2)\, x_n = 0$$

και να βρεθεί μια δεύτερη λύση με τη μεθοδο υποβιβασμού της τάξης.

**Λύση.** Η $x_n = n$ αληθεύει διότι

$$n(n+1)(n+2) - 5(n+2)(n+1) + 4(n+1)(n+2)n = 0$$

Με $y_n = x_n u_n = n u_n$ είναι

$$\begin{aligned} & n(n+1)(n+2)u_{n+2} - 5n(n+2)(n+1)u_{n+1} + (n+1)(n+2)nu_n = 0 \\ \iff\ & n(n+1)(n+2)(u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n) = 0 \\ \iff\ & u_{n+2} - u_{n+1} - 4(u_{n+1} - u_n) = 0 \\ \iff\ & \Delta u_{n+1} - 4\Delta u_n = 0 \end{aligned}$$

Με $z_n = \Delta u_n$ είναι

$$z_{n+1} - 4z_n = 0 \implies z_n = 4^n z_0 \implies$$

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= 4^n z_0 \implies u_n - u_0 = z_0 \sum_{s=0}^{n-1} 4^s = z_0 \frac{4^n - 1}{4-1} = \frac{z_0}{3}(4^n - 1) \implies \\ u_n &= u_0 + \frac{z_0}{3}(4^n - 1) = u_0 + \frac{\Delta u_0}{3}(4^n - 1) = u_0 + \frac{1}{3}(u_1 - u_0)(4^n - 1) \end{aligned}$$

με $u_0 = 0,\ u_1 = 3,$ έχουμε $u_n = 4^n - 1$ και παίρνουμε την

$$y_n = x_n u_n = n(4^n - 1)$$

που είναι πράγματι λύση.

8. Να λυθεί η (μη γραμμική) Εξίσωση Διαφορών:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n - 5}{x_n - 2}\,.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$. Απο την εξίσωση έχουμε

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 5} = \frac{\frac{4x_n - 5}{x_n - 2} - 1}{\frac{4x_n - 5}{x_n - 2} - 5} = \frac{4x_n - 5 - x_n + 2}{4x_n - 5 - 5x_n + 10} = -3\ \frac{x_n - 1}{x_n - 5}\,.$$

Με $u_n = \dfrac{x_n - 1}{x_n - 5}$ έχουμε την $u_{n+1} = -3u_n$ με γενική λύση

$$u_n = (-3)^n u_0 \,,$$

άρα

$$x_n - 1 \;=\; u_n(x_n - 5) \implies x_n(1 - u_n) = 1 - 5u_n \implies$$

$$\begin{aligned} x_n = \varphi(n, x_0) &= \frac{1 - 5u_n}{1 - u_n} = \frac{5u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{5(-3)^n u_0 - 1}{(-3)^n u_0 - 1} \\ &= \frac{5(-3)^n \frac{x_0-1}{x_0-5} - 1}{(-3)^n \frac{x_0-1}{x_0-5} - 1} = \frac{5(-3)^n (x_0 - 1) - (x_0 - 5)}{(-3)^n (x_0 - 1) - (x_0 - 5)} \,. \end{aligned}$$

9. Να λυθεί η (μη γραμμική) Εξίσωση Διαφορών:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 3} \,.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$ με ίσε ρίζες

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 = \lambda \,.$$

Παρατηρούμε ότι η $x_n = \lambda$ είναι μια **σταθερή λύση**. Απο την εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n+1} + 1} &= \frac{1}{\frac{x_n-1}{x_n+3} + 1} = \frac{1}{\frac{x_n-1+x_n+3}{x_n+3}} = \frac{x_n + 3}{2(x_n + 1)} = \frac{1}{2}\,\frac{x_n + 1 + 2}{x_n + 1} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{x_n + 1}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{x_n + 1} \,. \end{aligned}$$

Με $u_n = \dfrac{1}{x_n + 1}$ έχουμε την $u_{n+1} = \frac{1}{2} + u_n$ με γενική λύση

$$u_n = u_0 + \frac{n}{2} \,,$$

άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n + 1} &= \frac{1}{x_0 + 1} + \frac{n}{2} = \frac{2 + n(x_0 + 1)}{2(x_0 + 1)} \implies \\ x_n &= \varphi(n, x_0, \lambda) = \frac{2(x_0 + 1)}{2 + n(x_0 + 1)} - 1 = \frac{2(x_0 + 1) - 2 - n(x_0 + 1)}{2 + n(x_0 + 1)} \\ &= \frac{2x_0 - n(x_0 + 1)}{2 + n(x_0 + 1)} = \frac{2x_0 - n(x_0 - \lambda)}{2 + n(x_0 - \lambda)} \,. \end{aligned}$$

10. Να λυθεί το Σύστημα Εξισώσεων Διαφορών

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + 2y_n \\ y_{n+1} & = & 3x_n + 2y_n \end{array} \right\} \tag{8}$$

με την κανονική μορφή Jordan του πίνακα του συστήματος.

**Λύση.** Το σύστημα έχει την μορφή $r_{n+1} = Ar_n$ όπου

$$r_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος είναι $r_n = A^n r_0$ και ζητάμε τον $A^n$. Ο $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

με ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Για τα χαρακτηριστικά διανύσματα του $A$ έχουμε:

Για τη ρίζα $\lambda_1 = -1$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + y = 0$$

με μια λύση

$$a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για τη ρίζα $\lambda_1 = 4$,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x - y = 0$$

με μια λύση

$$b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα

$$B = [a \ \ b] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A$ είναι

$$J = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $J = B^{-1}AB \iff A = BJB^{-1}$. Με τη Μαθηματική Επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^n = BJ^nB^{-1}$ όπως επίσης ότι

$$J^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} A^n = BJ^nB^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4^n + 3(-1)^n & 2 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 3 \cdot 4^n - 3 \cdot (-1)^n & 3 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε για τη λύση έχουμε

$$\begin{aligned} r_n = A^n r_0 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4^n + 3(-1)^n & 2 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 3 \cdot 4^n - 3 \cdot (-1)^n & 3 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}[4^n + 3(-1)^n]x_0 + \frac{1}{5}[2 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n]y_0 \\ \\ \frac{1}{5}[3 \cdot 4^n - 3 \cdot (-1)^n]x_0 + \frac{1}{5}[3 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n]y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11. Να λυθεί το Σύστημα (8) με το Θεώρημα Cayley-Hamilton.

**Λύση.** Το σύστημα έχει την μορφή

$$r_{n+1} = Ar_n$$

όπου

$$r_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος είναι $r_n = A^n r_0$. Ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\phi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4$$

με ρίζες $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Η αλγοριθμική (Ευκλείδια) διαίρεση του $\lambda^n$ με το $\phi(\lambda)$ δίνει υπόλοιπο 1ου βαθμού $v(\lambda) = a\lambda + b$ και έχουμε

$$\lambda^n = \phi(\lambda)p(\lambda) + v(\lambda) = (\lambda 62 - 3\lambda - 4)p(\lambda) + a\lambda = b$$

Κατά το θεώρημα Galley - Hamilton είναι $\phi(A) = 0$, άρα από την τελευταία σχέση έχουμε

$$A^n = aA + bI$$

Επίσης από την ίδια σχέση με $\lambda = -1, 4$ (τις ρίζες του $\phi$) έχουμε

$$\begin{bmatrix} (-1)^n = a(-1) + b \\ 4^n = a \cdot 4 + b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = \frac{1}{5}[4^n - (-1)^n] \\ b = \frac{1}{5}[4^n + 4(-1)^n] \end{bmatrix}$$

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-6 = \lambda^2-3\lambda+2-6 = \lambda^2-3\lambda-4$$

$$\lambda^n = (\lambda^2-3\lambda-4)p(\lambda) + (a\lambda+b)$$

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^n = -a+b \\ 4^n = 4a+b \end{array}\right\} \longrightarrow 4a = 4^n - (-1)^n$$

$$a = \frac{1}{5}[4^n - (-1)^n]$$

$$b = a+(-1)^n = \frac{1}{5}[4^n-(-1)^n]+(-1)^n = \frac{1}{5}(4^n+\frac{4}{5})-1)^n] = \frac{1}{5}[4^n+4(-1)^n]$$

$$A^n = \phi(A)p(A)+a(A)+bI = aA+bI = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} A^n = aA+bI &= a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & \\ 3a & 2a+b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4^n+3(-1)^n & 2\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n \\ 3\cdot 4^n - 3\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= r_n = A^n r_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4^n+3(-1)^n & 2\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n \\ 3\cdot 4^n - 3\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}[4^n+3(-1)^n]x_0 + \frac{1}{5}[2\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n]y_0 \\ \\ \frac{1}{5}[3\cdot 4^n - 3\cdot(-1)^n]x_0 + \frac{1}{5}[3\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n]y_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

12. Να λυθεί το Σύστημα (8) με τον Μετασχηματισμό Z.

    **Λύση.** Παίρνοντας τον Μετασχηματισμό Z των δύο μελών του Συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} Z(r_{n+1}) &= Z(Ar_n) \iff z[\tilde{r}(z) - r(0)] = A\tilde{r}(z) \iff \\ (zI-A)\tilde{z} &= zr(0) \iff \tilde{r}(z) = z(zI-A)^{-1}r(0) \end{aligned}$$

    Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε

$$r(z) = Z^{-1}[z(zI-A)^{-1}]r(0) = Z^{-1}\left[z(zI-A)^{-1}\right]r(0)$$

$$zI-A=z\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z-1&2\\3&z-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}z(zI-A)^{-1} &= z\begin{bmatrix}z-1&2\\3&z-2\end{bmatrix}^{-1}=z\frac{1}{(z-1)(z-2)-6}\begin{bmatrix}z-2&-2\\-3&z-1\end{bmatrix}\\ &= \frac{z}{z^2-3z-4}\begin{bmatrix}z-2&-2\\-3&z-1\end{bmatrix}\\ &= \frac{z}{(z+1)(z-4)}\begin{bmatrix}z-2&-2\\-3&z-1\end{bmatrix}\\ &= z\begin{bmatrix}\frac{z-2}{(z+1)(z-4)}&\frac{-2}{(z+1)(z-4)}\\ \frac{-3}{(z+1)(z-4)}&\frac{z-1}{(z+1)(z-4)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Για τα κλάσματα έχουμε

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-4)}=\frac{\frac{3}{5}}{z+1}+\frac{\frac{2}{5}}{z-4}\,,\qquad \frac{-2}{(z+1)(z-4)}=\frac{\frac{2}{5}}{z+1}+\frac{\frac{-2}{5}}{z-4}\,,$$
$$\frac{-3}{(z+1)(z-4)}=\frac{\frac{3}{5}}{z+1}+\frac{\frac{-3}{5}}{z-4}\,,\qquad \frac{z-1}{(z+1)(z-4)}=\frac{\frac{2}{5}}{z+1}+\frac{\frac{3}{5}}{z-4}\,.$$

Τελικά η λύση είναι

$$\begin{aligned}r(z) &= Z^{-1}\left[z(zI-A)^{-1}\right]r(0)=Z^{-1}\left\{z\begin{bmatrix}\frac{\frac{3}{5}}{z+1}+\frac{\frac{2}{5}}{z-4}&\frac{\frac{2}{5}}{z+1}+\frac{\frac{-2}{5}}{z-4}\\ \frac{\frac{3}{5}}{z+1}+\frac{\frac{-3}{5}}{z-4}&\frac{\frac{2}{5}}{z+1}+\frac{\frac{3}{5}}{z-4}\end{bmatrix}\right\}r(0)\\ &= \frac{1}{5}Z^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3z}{z+1}+\frac{2z}{z-4}&\frac{2z}{z+1}+\frac{-2z}{z-4}\\ \frac{3z}{z+1}+\frac{-3z}{z-4}&\frac{2z}{z+1}+\frac{3z}{z-4}\end{bmatrix}r(0)=\frac{1}{5}Z^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3z}{z+1}+\frac{2z}{z-4}&\frac{2z}{z+1}+\frac{-2z}{z-4}\\ \frac{3z}{z+1}+\frac{-3z}{z-4}&\frac{2z}{z+1}+\frac{3z}{z-4}\end{bmatrix}r(0)\\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4^n+3(-1)^n&2\cdot4^n-2\cdot(-1)^n\\ 3\cdot4^n-3\cdot(-1)^n&3\cdot4^n-2\cdot(-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}\{4^n+3(-1)^n\}\,x_0 + \{2\cdot4^n-2\cdot(-1)^n\}\,y_0\\ \{3\cdot4^n-3\cdot(-1)^n\}\,x_0 + \{3\cdot4^n-2\cdot(-1)^n\}\,y_0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

13. Να λυθεί το Σύστημα Εξισώσεων Διαφορών

$$\left\{\begin{aligned}x_{n+1}&=9x_n+2y_n\,,\\ y_{n+1}&=-8x_n+y_n\,.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

με την κανονική μορφή Jordan του πίνακα του συστήματος.

**Λύση.** Το σύστημα έχει την μορφή $r_{n+1}=Ar_n$ όπου

$$r_n=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}9&2\\-8&1\end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος είναι $r_n = A^n r_0$ και ζητάμε τον $A^n$. Ο $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 9-\lambda & 2 \\ -8 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\,\lambda + 25$$

με ρίζες ίσες $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Για τα χαρακτηριστικά διανύσματα του $A$ έχουμε:

Για τη ρίζα $\lambda = 5$,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x + y = 0$$

με μια λύση

$$a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Το δεύτερο διάνυσμα το βρίσκουμε με την αλυσίδα.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff 4x + 2y = 1$$

με μια λύση

$$b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα

$$B = [a\ \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad B^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A$ είναι

$$J = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $J = B^{-1}AB \iff A = BJB^{-1}$. Με τη Μαθηματική Επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^n = BJ^nB^{-1}$ όπως επίσης ότι

$$J^n = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 5^n & n\,5^{n-1} \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} A^n &= BJ^nB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & n\,5^{n-1} \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= 5^{n-1} \begin{bmatrix} 5+4n & 2n \\ -8n & 5-4n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε για τη λύση έχουμε

$$r_n = A^n r_0 \;\; = \;\; 5^{n-1} \begin{bmatrix} 5+4n & 2n \\ -8n & 5-4n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

14. Να λυθεί το Σύστημα (10) με το Θεώρημα Cayley-Hamilton.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του (10) (Πρόβλημα 13) είναι

$$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 9-\lambda & 2 \\ -8 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\,\lambda + 25$$

με ρίζες ίσες $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Η αλγοριθμική (Ευκλείδια) διαίρεση του $\lambda^n$ με το $\varphi(\lambda)$ δίνει υπόλοιπο 1ου βαθμού $\upsilon(\lambda) = a\lambda + b$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \varphi(\lambda)p(\lambda) + \upsilon(\lambda) = (\lambda^2 - 10\,\lambda + 25)p(\lambda) + a\lambda + b \\ &= (\lambda - 5)^2 p(\lambda) + a\lambda + b \end{aligned} \tag{11}$$

Με παραγώγιση έχουμε

$$n\lambda^{n-1} \;\; = \;\; 2(\lambda - 5)\,p(\lambda) + (\lambda - 5)^2 p'(\lambda) + a \tag{12}$$

Κατά το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι $\varphi(A) = 0$, οπότε από την (11) έχουμε

$$A^n = aA + bI\,.$$

Με $\lambda = 5$ (τη ρίζα του $\varphi$) από τις (11), (12) έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 5^n & = & a5 + b \\ n5^{n-1} & = & a \end{array} \right\} \;\Longrightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} a & = n5^{n-1} \\ b & = 5^n(1-n) \end{array} \right\}.$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} A^n = aA + bI \;\; &= \;\; a\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a+b & 2a \\ -8a & a+b \end{bmatrix} \\ &= \;\; 5^{n-1}\begin{bmatrix} 5+4n & 2n \\ -8n & 5-4n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \;\; = \;\; r_n = A^n r_0 = 5^{n-1}\begin{bmatrix} 5+4n & 2n \\ -8n & 5-4n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

15. Να διακριτοποιηθεί η Διαφορική Εξίσωση:

$$x' = ax + b\,.$$

**Λύση.** Η παράγωγοφος

$$x'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$$

προσεγγίζεται από τον λόγο

$$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$$

τόσο καλύτερα όσο το $\varepsilon$ είναι μικρότερο. Έτσι, η ΔΕ προσεγγίζεται απο την εξίσωση:

$$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = ax(t) + b \iff x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon[ax(t) + b] \iff$$

$$x(t+\varepsilon) = (1+\varepsilon a)x(t) + \varepsilon b$$

Αν τώρα διαιρέσουμε το $[0, t]$ σε $n$ ίσα μέρη $\varepsilon = \frac{t}{n}$, έχουμε $t = n\varepsilon$ και η τελευταία Εξίσωση γίνεται

$$x(n\varepsilon + \varepsilon) = (1+\varepsilon a)\,x(n\varepsilon) + \varepsilon b\,.$$

Με $\quad x(n\varepsilon) = x_n$, έχουμε την εξίσωση Διαφορών

$$x_{n+1} = (1+\varepsilon a)\,x_n + \varepsilon b\,.$$

16. Να λύσετε τη συναρτησιακή Εξίσωση Διαφορών:

$$x(t+0.5) = a\,x(t) + b\,.$$

**Λύση.** Η εξίσωση έχει σταθερή λύση ίση με $\rho = \frac{b}{1-a}$. Ονομάζουμε $n$ το ακέραιο μέρος του $\frac{t}{1/2}$, δηλαδή $n = \left[\frac{t}{1/2}\right] = [2t]$ και τότε

$$n \le 2t < n+1 \iff 2t = n + w, \quad 0 \le w < 1$$

$$t = \frac{n}{2} + \frac{w}{2} = \frac{n}{2} + \vartheta, \quad 0 \le \vartheta < \frac{1}{2}\,.$$

Η εξίσωση γίνεται

$$x(\frac{n}{2} + \vartheta + \frac{1}{2}) = a\,x(\frac{n}{2} + \vartheta t) + b\,.$$

Με $x(\frac{n}{2}+\vartheta)=x_n$ έχουμε την Ε.Δ.

$$x_{n+1}=a\,x_n+b\,.$$

της οποίας η λύση είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\frac{n}{2}+\vartheta)=x_n=a^n(x_0-\rho)+\rho \\ &= a^{[2t]}\,[x(\vartheta)-\rho]+\rho\,, \end{aligned}$$

όπου

$$x(\vartheta)=x(t-\frac{n}{2})=x\big(t-\frac{[2t]}{2}\big)$$

είναι η αρχική συνάρτηση που ορίζεται στο $[0,\frac{1}{2})$ δηλαδή οι αρχικές αυθαίρετες τιμές της λύσης στο $[0,\frac{1}{2})$.

17. Η ΕΔ που ορίζει η συνάρτηση

$$f\,:\,\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=-\frac{3}{2}\,x^2+\frac{5}{2}\,x+1\,,$$

(α′) έχει δύο απωθητικά (ασταθή) σταθερά σημεία,

(β′) το $x_0=0$ είναι περιοδικό με περίοδο $p=3$ (3-περιοδικό) και το $(\,0,1,2\,)$ είναι ένας ασταθής (απωθητικός) 3-κύκλος.

**Απόδειξη.**

(α′) Για τα σταθερά σημεία έχνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} f(x)=x \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{3}{2}\,x^2+\frac{5}{2}\,x+1=x \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{3}{2}\,x^2+\frac{5}{2}\,x+1-x=0\,. \end{aligned}$$

με ρίζες

$$e_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{6}$$

Για το είδος της ευστάθεια έχουμε

$$f\,'(x)=-3\,x+\frac{5}{2}\,,$$

$$|f\,'(e_{1,2})|=\left|\frac{3\pm\sqrt{33}}{6}\right|>1$$

και τα σταθερά σημεία είναι απωθητικά.

(β′) Ισχύουν

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = f(0) = 1\,, \\ x_2 &= f(x_1) = f(1) = 2\,, \\ x_3 &= f(x_2) = f(2) = 0 = x_0\,, \end{aligned}$$

άρα η διατεταγμένη τριάδα $(\,x_0, x_1, x_2\,) = (\,0, 1, 2\,)$ είναι ένας 3-κύκλος. Επίσης ισχύουν άρα

$$\begin{aligned} (f^3)'(0) &= (f^3)'(x_0) = f'(x_2)f'(x_1)f'(x_0) = \\ &= f'(2)f'(1)f'(0) = \frac{-7}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{5}{2} = \frac{35}{8} > 1\,, \end{aligned}$$

άρα ο 3-κύκλος $(\,0, 1, 2\,)$ είναι ένας ασταθής (απωθητικός) 3-κύκλος.

18. Η ΕΔ που ορίζει η συνάρτηση

$$f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}\,cos\,x\,,$$

(α′) έχει ένα σταθερό σημείο $e$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$,

(β′) το $x_0 = 0$ είναι περιοδικό με περίοδο $p = 2$ (2-περιοδικό) και το διατεταγμένο ζεύγος $(\,0, \frac{\pi}{2}\,)$ είναι ένας ευσταθής (ελκτικός) 2-κύκλος.

**Απόδειξη.**

(α′) Για την $g(x) = f(x) - x$ παρατηρούμε ότι

$$g(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

και συμπεραίνουμε ότι η $f$ έχει ένα σταθερό σημείο $e$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

(β′) Ισχύουν

$$f(0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad f(\frac{\pi}{2}) = 0\,,$$

άρα το $(\,0, \frac{\pi}{2}\,)$ είναι ένας 2-κύκλος. Επίσης

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\,sin\,x$$

και

$$(f^2)'(0) = f'(\frac{\pi}{2})f'(0) = 0 \implies |(f^2)'(0)| < 1$$

άρα ο 2-κύκλος $(\,0, \frac{\pi}{2}\,)$ είναι ένας ελκτικός 2-κύκλος.

19. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία της Λογιστικής εξίσωσης

$$x_{n+1} = \mu\, x_n(1 - x_n)$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu$ και το είδος της ευστάθειάς τους.

**Λύση.** Η συνάρτηση που ορίζει την Λογιστική Εξίσωση είναι η

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mu\, x(1 - x)\,.$$

Για τα σταθερά σημεία έχουμε την εξίσωση

$$f(x) = x \iff \mu\, x(1 - x) = x \iff x(\mu - 1 - \mu x) = 0$$

και τα σταθερά σημεία είναι τα

$$e_0 = 0, \qquad e_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}\,.$$

Για το είδος της ευστάθειας έχουμε

$$f'(x) = \mu - 2\mu\, x\,,$$

$$f'(e_0) = \mu, \qquad f'(e_\mu) = \mu - 2\mu\big(1 - \frac{1}{\mu}\big) = 2 - \mu\,.$$

έτσι έχουμε

$$|f'(e_0)| < 1 \iff |\mu| < 1 \iff -1 < \mu < 1\,,$$

$$|f'(e_\mu)| < 1 \iff |2 - \mu| < 1 \iff 1 < \mu < 3\,.$$

Οπότε η ευστάθεια είναι όπως στον επόμενο πίνακα:

| | $e_0$ | $e_\mu$ |
|---|---|---|
| $\mu < -1$ | ασταθές | ασταθές |
| $\mu = -1$ | ουδέτερο | ασταθές |
| $-1 < \mu < 1$ | ευσταθές | ασταθές |
| $\mu = 1$ | ουδέτερο | ουδέτερο |
| $1 < \mu < 3$ | ασταθές | ευσταθές |
| $\mu = 3$ | ασταθές | ουδέτερο |
| $3 < \mu$ | ασταθές | ασταθές |

20. Για τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mu\, x(1 - x)\,.$$

που ορίζει την Λογιστική Εξίσωση

$$x_{n+1} = \mu\, x_n(1 - x_n)$$

να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\mu$ ώστε η $f$ να περιορίζεται στην

$$f:[0,1] \longrightarrow [0,1].$$

**Λύση.** Ισχύουν

$$f(0)=0\,,\qquad f(1)=0\,,\qquad f'(x)=\mu-2\mu\,x,\qquad f''(x)=-2\mu\,.$$

$$f'(x)=0 \iff x=\frac{1}{2}\,.$$

Για $\mu=0$ είναι $f=0$ (ταυτοτικά). Για $\mu\neq 0$ η $f$ έχει ακρόταο ίσο με

$$y_0=f\big(\frac{1}{2}\big)=\frac{\mu}{4}\,.$$

το οποίο είμαι μέγιστο για $\mu>0$. Με $0<\mu<4$ το μέγιστο είναι $0<y_0<1$ και η $f$ περιορίζεται στο $[0,1]$.